

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A IX-A

1. În trei cutii notate A, B, C, sunt 100 de bile. Dacă numărul bilelor din cutia B diferă de numărul bilelor din cutia A cu 4, respectiv numărul bilelor din cutia C diferă de numărul bilelor din cutia A cu 3 și totodată numărul bilelor din fiecare cutie nu se divide la 3, să se afle câte bile sunt în fiecare cutie.

Soluție.

$$a + b + c = 100, |a - b| = 4, |a - c| = 3 \dots\dots\dots 2p$$

$$b = a - 4 \text{ nu e posibil} \dots\dots\dots 2p$$

$$b = a + 4 \text{ conduce la posibilitățile } (a; b; c) = (31; 35; 34) \text{ și } (a; b; c) = (33; 37; 30) \dots\dots\dots 2p$$

$$(a; b; c) = (33; 37; 30) \text{ este exclusă} \Rightarrow \text{soluție unică } (a; b; c) = (31; 35; 34) \dots\dots\dots 1p$$

2. Fie ABC un triunghi și punctele $D \in (BC)$ încât $BD = 2DC$, $E \in (AB)$ încât $AE = EB$, respectiv $F \in (CE)$ încât $CF = FE$. Se cere:

a) Arătați că $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;

b) Arătați că punctele A, F, D sunt coliniare și determinați valoarea raportului $\frac{AF}{FD}$.

Soluție.

a)

$$\text{Arată } \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Arată } \overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \dots\dots\dots 2p$$

b)

$$\text{Justifică } A, F, D \text{ coliniare} \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Determină } \frac{AF}{FD} = 3 \dots\dots\dots 1p$$

3. Se consideră mulțimea P a tuturor progresiilor aritmetice neconstante $(a_n)_{n \geq 1}$ care au $a_1 = 4$ și toți termenii numere naturale.

- a) Arătați că toate progresiile din mulțimea P au rația număr natural nenul;
 b) Determinați termenul general al acelei progresii din P în care $a_{20} \cdot a_{14}$ are cea mai mică valoare;
 c) Aflați câte progresii din mulțimea P au ca termen numărul 2014.

Soluție.

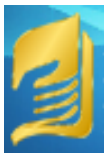
- a)
 Constată necesar $r \in \mathbb{Z}$ 1p
 Constată necesar $r \neq 0$ 1p
 Constată necesar $r \in \mathbb{N}^*$ 1p
 b)
 Rația minim posibilă este $r = 1$ 1p
 $a_{20} \cdot a_{14} \geq 23 \cdot 17$ 1p
 c)
 $a_k = 2014 \Rightarrow (k-1)r = 2010$ 1p
 $r / 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67 \Rightarrow 16$ progresii au ca termen numărul 2014 1p

4. O ecuație de gradul al doilea $ax^2 + bx + c = 0$ o vom numi "perfectă" dacă a, b, c sunt numere reale nenule și oricum am schimba ordinea celor trei coeficienți a, b, c , toate ecuațiile astfel obținute au o soluție reală comună.

- a) Arătați că ecuația $x^2 - 2014x + 2013 = 0$ este perfectă;
 b) Arătați că ecuația $2013x^2 + 2014x + 1 = 0$ nu este perfectă;
 c) Determinați ce condiție trebuie să verifice numerele $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ pentru ca ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ să fie perfectă.

Soluție.

- a) $x = 1$ soluție comună 3p
 b) Justificare 1p
 c)
 Dacă x_0 verifică toate ecuațiile atunci $x_0 = 1 \Rightarrow a + b + c = 0$ 1p
 Dacă $a + b + c = 0$ atunci $x_0 = 1$ verifică toate ecuațiile 1p
 \Rightarrow condiția de ecuație "perfectă" este $a + b + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}^*$ 1p



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A X-A

1. Considerăm numărul complex $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.
- Demonstrați că $z^2 - z + 1 = 0$ și $z^3 + 1 = 0$;
 - Arătați că $z^{2014} + z$ este număr real;
 - Arătați că $(1+z)(1-z^2)(1-z^{2014})(1+z^{2015})$ este număr natural pătrat perfect.

Soluție.

- a)
- Justifică $z^2 - z + 1 = 0$ 2p
- Justifică $z^3 + 1 = 0$ 1p
- b) $z^{2014} + z = 0 \in \mathbb{R}$ 2p
- c) $z^{2014} = -z$; $z^{2015} = -z^2$ 1p
- $a = 3^2$ 1p

2. Sunt date 2013 greutateți marcate cu masele de 1g, 2g, ..., 2013g. Atunci:
- Din greutatețile de 1g, 2g, ..., 9g formați trei grămăjoare de mase egale;
 - Justificați că din oricare 6 greutateți de mase $m, m+1, m+2, m+3, m+4, m+5$ se pot forma trei grămăjoare de mase egale;
 - Arătați că se pot forma cu cele 2013 greutateți trei grămezi de mase egale;
 - Dar dacă aveți 2014 greutateți marcate cu masele de 1g, 2g, ..., 2014g, puteți forma cu ele 3 grămezi cu masele egale? Justificați răspunsul.

Soluție.

- a) Formează un exemplu 1p
- b) $m + (m + 5) = (m + 1) + (m + 4) = (m + 2) + (m + 3)$ 1p
- c) Împărțim primele 9 greutateți în trei grămăjoare de mase egale 1p
- Rămân 2004 = 6 · 334 greutateți 1p
- Cele 2004 de greutateți = 334 de grupe, fiecare grupă cu 3 grămezi de mase egale 1p
- Finalizare 1p
- d) Nu este posibil, deoarece $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 2014$ nu se divide la 3 1p

3. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2013 - x, & x \in \mathbb{Q} \\ 2014 - x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

- a) Calculați $f(2014) + f(2013 - \sqrt{2014})$;

- b) Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $f(x) = 2014$;
 c) Arătați că $(f \circ f)(x) = x, (\forall)x \in \mathbb{R}$
 d) Demonstrați că f este inversabilă și determinați inversa ei.

Soluție.

- a) $f(2014) + f(2013 - \sqrt{2014}) = \sqrt{2014}$ 2p
 b) $x = -1$ 2p
 c) Arată $(f \circ f)(x) = x, (\forall)x \in \mathbb{R}$ 2p
 d) Conform cu c) funcția este bijectivă și $f^{-1} = f$ 1p

4. 4.1 Arătați că $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, pentru orice numere $a, b \in \mathbb{R}$.

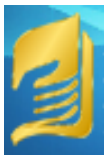
4.2 Un melc se deplasează prin primul cadran al unui sistem de coordonate (xOy) , pe un grafic

de ecuație $y = 2^{\frac{1}{\log_2 x}}$, cu $x \in (1; +\infty)$.

- a) Arătați că $y > 1$ și $(\log_2 y) \cdot (\log_2 x) = 1$;
 b) Arătați că $x \cdot y \geq 4$;
 c) Determinați distanța minimă de la melc până la originea O a sistemului de coordonate.

Soluție.

- 4.1 2p
 4.2.
 a) $y > 1$ 1p
 $(\log_2 y) \cdot (\log_2 x) = 1$ 1p
 b) 2p
 c) distanța minimă este $2\sqrt{2}$, obținută cu $x = y = 2$ 1p



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A XI-A

1. Considerăm matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- Arătați că C este inversabilă, după care calculați C^{-1} și verificați egalitatea $A = C^{-1} \cdot B \cdot C$;
- Demonstrați că $B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$;
- Calculați A^n , $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție.

- C este inversabilă 1p
 $C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ 1p
 $A = C^{-1} \cdot B \cdot C$ 1p
- Inducție 1p
- $A^2 = C^{-1} \cdot B^2 \cdot C$ 1p
 $A^n = C^{-1} \cdot B^n \cdot C$ 1p
Finalizare 1p

2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a \geq -2$. Determinați a și b încât $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + a} - b}{x^2 + 2x - 3} = \frac{3}{16}$.

Soluție.

- $b \neq \sqrt{a+2} \Rightarrow$ limită infinită 2p
 $b = \sqrt{a+2} \Rightarrow L = \frac{3}{8\sqrt{a+2}}$ 3p
 $L = \frac{3}{16} \Rightarrow a = 2$ 1p
 $\Rightarrow b = 2$ 1p

3. Fie $a > 0$, $b \in (0; 1)$ și funcția $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{pentru } x \in [0; b] \\ a \cdot x^4, & \text{pentru } x \in (b; 1] \end{cases}$

a) Arătați că f are limită în $x = b$ dacă și numai dacă $a \cdot b = 1$;

b) Calculați $L_1 = \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$ și $L_2 = \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x > b}} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$.

Solutie.

a)

$l_s = b^3, l_d = a \cdot b^4$ 1p

$l_s = l_d \Leftrightarrow a \cdot b = 1$ 2p

b)

$L_1 = 3b^2$ 1p

$L_2 = -\infty$ pentru $a \cdot b < 1$ 1p

$L_2 = +\infty$ pentru $a \cdot b > 1$ 1p

$L_2 = 4b^2$ pentru $a \cdot b = 1$ 1p

4. Fie $M_2(\mathbb{R})$ mulțimea matricelor pătratice de ordin doi și cu elemente numere reale. Arătați că:

a) $\det(X + Y) + \det(X - Y) = 2(\det X + \det Y)$, oricare ar fi $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$;

b) Dacă $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ atunci sau $\det(A + B) \geq \det A + \det B$ sau $\det(A - B) \geq \det A + \det B$;

c) Andrei vrea să arate că la orice alegere de trei matrici $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$ poate alege semne + sau - astfel încât $\det(A \pm B \pm C) \geq \det A + \det B + \det C$. Aflați dacă acest lucru este posibil.

Dacă da, considerând $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, aflați cum trebuie să aleagă Andrei semnele + și -.

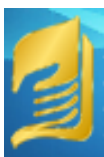
Solutie.

a) Verificare 2p

b) Justificare 2p

c) Justificare răspuns afirmativ 2p

Alegerea semnelor +, - în cazul concret dat 1p



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A XII-A

- Considerând inelul $(\mathbb{Z}_{2014}; +; \cdot)$, se cere:
 - Arătați că $\widehat{53}$ nu este inversabil;
 - Arătați că $\widehat{2011}$ este inversabil și are inversul $\widehat{671}$;
 - Rezolvați în \mathbb{Z}_{2014} ecuația $\widehat{3} \cdot x + \widehat{2010} = \widehat{1}$

Soluție.

- $53/2014$, deci $\widehat{53}$ este neinvertibil 2p
- $(2011; 2014) = 1 \Rightarrow \widehat{2011}$ este inversabil 1p
 Justifică $\widehat{2011} \cdot \widehat{671} = \widehat{1}$, deci $\widehat{2011}^{-1} = \widehat{671}$ 2p
- $\widehat{3} \cdot x + \widehat{2010} = \widehat{1} \Leftrightarrow \widehat{2011} \cdot x = \widehat{2009}$ 1p
 $x = \widehat{671} \cdot \widehat{2009} = -\widehat{671} \cdot \widehat{5} = -\widehat{1341} = \widehat{673}$ 1p

- Fie funcția $f: [-1; 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2e^x}, & x \in [-1; 0] \\ \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}, & x \in (0; 3] \end{cases}$

a) Arătați că f admite primitive;

- Arătați că $F: [-1; 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^x}, & x \in [-1; 0] \\ 2\sqrt{x+1} - 2\ln(1+\sqrt{1+x}) + 2\ln 2 - 2, & x \in (0; 3] \end{cases}$

este primitiva funcției f care se anulează în $x=0$;

- Calculați $\int_{-1}^3 f(x) dx$

Soluție.

- Justifică f continuă pe $[-1; 3]$ 1p
 f continuă \Rightarrow primitivabilă 1p
-

Justifică F derivabilă pe $[-1; 3] \setminus \{0\}$ 1p

Justifică F derivabilă în $x=0$ 1p

Constată $F' = f$ și $F(0) = 0$, concluzie 1p

c)

$\int_{-1}^3 f(x) dx = F_1(x) \Big|_{-1}^0 + F_2(x) \Big|_0^3$ 1p

Finalizare 1p

3. Pe \mathbb{Z} se consideră legea de compoziție $x \circ y = xy - 5x - 5y + 30$.

a) Arătați că legea \circ este comutativă, asociativă și cu element neutru;

b) Determinați mulțimea elementelor inversabile din $(\mathbb{Z}; \circ)$;

c) Pe tablă sunt scrise numerele 0, 1, 2, ..., 24. Cei 24 de elevi ai clasei trec pe rând la tablă și aleg câte 2 numere de pe tablă, le șterg și scriu pe tablă rezultatul compunerii, după legea \circ , a celor două numerele alese. Aflați ce număr va scrie pe tablă ultimul elev.

Soluție.

a) Justificare 3p

b)

$x' = 5 + \frac{1}{x-5} \in \mathbb{Z}, x \neq 5$ 1p

\Rightarrow mulțimea elementelor inversabile este $\{4; 6\}$ 1p

c) ultimul număr este $1 \circ 2 \circ 3 \circ \dots \circ 24$ 1p

cum 5 este absorbant, ultimul număr este 5 1p

4. Fie $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx, n \in \mathbb{N}^*$. Se cere:

a) Calculați I_1 ;

b) Arătați că $(n+1)I_n + I_{n+1} = e, (\forall)n \in \mathbb{N}^*$;

c) Arătați că I_n este număr rațional numai în cazul $n = 1$.

Soluție.

a) 2p

b) 2p

c)

$n = 1 \Rightarrow I_1 = 1 \in \mathbb{Q}$ 1p

$n \geq 2 \Rightarrow I_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 2p